**Tentamen Statistiek MBW/KW (deel 1, tweede kans)**

Afdeling: Propedeuse MBW/KW 2020-2021

Examinator: Dr. J.B.M. Melissen

Datum: vrijdag 15 oktober 2021, duur tentamen: 2 uur

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven (30, 25, 25, 20 punten). Score = Puntentotaal/10

**Genormeerd op 85pt totaal**

**Opgave 1 (Totaal 30 punten)**

De luitenant Vergaar (LD) is (onder andere) verantwoordelijk voor het op orde houden van de voorraad T-shirts voor het militaire personeel van de Landmacht. Deze T-shirts worden op voorraad gehouden in de kleur: NATO Legergroen en in de maten: M, L en XL. Op grond van gegevens uit het verleden mag de luitenant Vergaar ervan uitgaan dat de maandelijks uitgegeven hoeveelheden normaal verdeeld met gemiddelde waarden en standaarddeviatie die in de onderstaande tabel staan vermeld

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Type artikel | Gemiddeld  Aantal/mnd | Standaarddeviatie  per maand |
| T-shirt Legergroen Maat M | 1205 | 320 |
| T-shirt Legergroen Maat L | 1947 | 436 |
| T-shirt Legergroen Maat XL | 455 | 112 |

De gewenste servicegraad is 98%. **De servicegraad is de kans dat het gevraagde aantal T-shirts in een maand ook daadwerkelijk kan worden geleverd uit voorraad.**

**1a. [6pts]** Op het moment (de eerste van de maand) is de voorraad van de maat M 1882 stuks. Bereken de servicegraad voor deze maand als er niet zou worden besteld. Moet er voor deze maand worden bijbesteld?

De servicegraad is de kans dat 1882 voldoende is voor de komende maand dus de kans dat het werkelijk gevraagde aantal hoogstens gelijk is aan het beschikbare aantal:

**4+2pt**

Of: Bij servicegraad 98% zijn er shirts nodig. Er zijn er dus ruim voldoende aanwezig.

**1b. [6pts]** Het is de eerste van de maand en de voorraad van de maat L is 735 stuks. Bereken hoeveel stuks maat L voor de komende maand moeten worden bijbesteld.

Er zijn gemiddeld 1947 stuks nodig met standaarddeviatie 436. Het aantal waarvoor de kans 0,98 is dat het gevraagde aantal hooguit hieraan gelijk is is

**3pt**

Trek de voorraad eraf

**2pt**

Bestellen moet in gehele stuks, dus minimaal 2108 stuks nodig (naar boven afronden voor alle zekerheid). **1pt**

**1c. [10pts]** De luitenant wil gaan uitrekenen hoeveel T-shirts hij voor een maand zou moeten bestellen als er geen voorraad was. Hij gaat dat op de volgende manier doen:

1. Bereken het totale aantal t-shirts dat gemiddeld nodig is in één maand.
2. Bereken de standaarddeviatie die hiervoor geldt.
3. Bereken met de antwoorden van 1. en 2. het totale aantal t-shirts dat nodig is om een servicegraad van 98% te garanderen voor het totale aantal t-shirts in één maand.
4. Bereken de percentages van de benodigde maten M, L en XL in een maand.
5. Bereken met het totale aantal uit punt 3 en de percentages uit punt 4 de maandelijks benodigde hoeveelheden van de maten M, L en XL.

Voer nu zelf het programma van luitenant Vergaar uit en bereken hoeveel stuks van maten M, L en XL hij dan zou moeten bestellen.

1. Gemiddeld in totaal 3607 stuks nodig. **2pt**
2. Standaarddeviatie kwadratisch optellen 3 standaarddeviaties:

**2pt**

1. Bestellen totaal **2pt**
2. Percentages maten M, L, XL: 33,41%, 53,98%, 12,61% **1pt**
3. Aantallen M, L, XL: 1584,0665, 2559,3507, 597,8772 **2pt**

Afronden: 1585, 2560, 598 **1pt**

**1d. [8pts]** Stel dat je bij 1c was uitgekomen op een totaal aantal te bestellen T-shirts van 4729,233 (dit is niet het juiste antwoord). Bereken dan de bijbehorende aantallen voor de maten M, L en XL. Bereken ook de bijbehorende servicegraden. Welke conclusie kun je hieruit trekken?

Aantallen: 1580,0367, 2552,8399, 596,3563 **2pt**

Afgerond: 1581, 2553, 597. **1pt**

Servicegraden:

**3pt**

De conclusie is dat al deze aantallen te klein zijn om de servicegraad per maar te halen. **2pt**

**Opgave 2 (Totaal 25 punten)**

**2a. [5pt]** De discrete kansvariabele is uniform verdeeld op de verzameling , m.a.w.

Bereken en . Let op: gebruik niet de formules voor een continue uniforme verdeling!

**2pt**

**2pt**

**1pt**

**2b. [5pt]** We kunnen van de discrete verdeling uit opgave 2a een continue maken door elk van de drie punten te vervangen door een interval van 1 breed ( ligt dan precies in het midden van een interval van tot ). De drie intervallen sluiten precies aan tot een interval waarop je dan een uniforme continue verdeling kunt nemen.

Bereken voor deze continue uniforme verdeling de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie (bijvoorbeeld met het formuleblad) en vergelijk deze waarden met de berekende waarde van 2a. Wat kun je concluderen?

Met de formules voor de continue verdeling levert invullen () :

De gemiddelde waarden zijn wel gelijk, maar de standaarddeviaties niet helemaal.

**(2+2+1pt, rekenfout -1pt)**

**2c. [5pt]**  De kansvariabelen en zijn beide normaal verdeeld met en . Bereken .

Het gaat hier over de som van twee kansverdelingen, dat is lastig, want zo’n kans kun je niet uitrekenen met de middelen die je nu hebt (daarvoor zou je een tweedimensionale integraal moeten uitrekenen). De truuk is dat je naar één kansvariabele zoekt, in dit geval de kansvariabele . Die is ook normaal verdeeld met (rekenregels)

met **(1pt, rekenfout -1pt)**

en . **(2pt, rekenfout -1pt)**

=

Je hebt namelijk precies de helft van een normale verdeling.

**(2pt, rekenfout -1pt)**

**2d. [5pt]** De kansvariabele is binomiaal verdeeld met en is onbekend. Bereken zodanig dat .

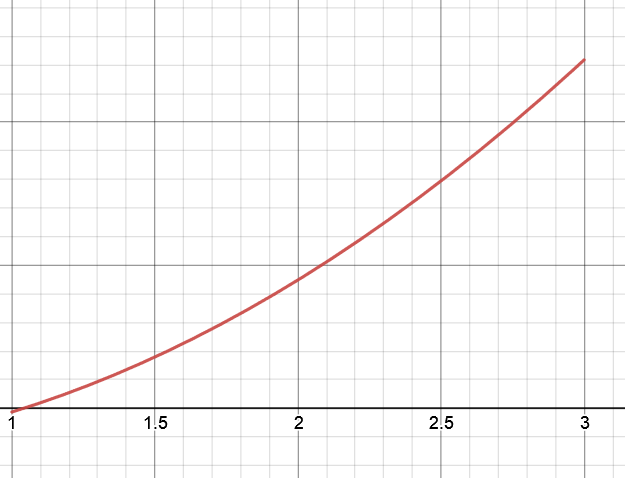
**1+2+1pt**

Oplossen met de solver levert . **1pt**

**2e. [5pt]** De continue kansvariabele heeft als kansdichtheidfunctie

Ga na of deze functie inderdaad een kansverdeling kan zijn en, zo ja, bereken de verwachtingswaarde van .

Als het om een kansdichtheidsverdeling gaat, dan moeten alle waarden van de functie minstens 0 zijn. Dat is niet zo, want de waarde in 1 is is negatief, dus het is geen kansverdeling. **5pt**



De functie is trouwens maar op een heel klein stukje negatief (zie plaatje), maar dat is voldoende om het geen kansdichtheid te maken, want kansen kunnen niet negatief zijn.

De oppervlakte onder de grafiek is trouwens wel gelijk aan 1:

De verwachtingswaarde op grond van deze foute kansdichtheid zou zijn

Als dit onderdeel onjuist is beantwoord kunnen met deze berekeningen toch nog **1+1pt** worden gehaald.

**Opgave 3 (Totaal 25 punten)**

In verband met verscherpte grensbewaking door stijgende aantallen vluchtelingen uit het Midden-Oosten voert de Koninklijke Marechaussee op lokale wegen in de grensregio’s 100%-controles uit. Voor een bepaalde dag wordt een inzet gepland waarbij gedurende tweeënhalf uur alle voertuigen op een geselecteerde locatie gecontroleerd moeten worden. Gebaseerd op gegevens van de RDW is de verwachting dat zich gedurende deze controle gemiddeld 36,7 voertuigen per uur aandienen en er wordt aangenomen dat dit volgens een Poissonverdeling zal gebeuren. Uit eerdere inzetten is gebleken dat de benodigde tijd per voertuig uniform is verdeeld tussen 5 en 17 minuten. Elke controle wordt uitgevoerd door een team van twee marechaussees.

**3a. [5pt]** Bereken hoeveel marechaussees er gemiddeld nodig zijn om deze controles uit te voeren.

3a. Gemiddeld 36,7 voertuigen per uur, gemiddelde controletijd minuten per voertuig, **1pt**

dus gemiddeld minuten controletijd per uur nodig. **2pt**

/60 = 6,73 teams nodig, dus 7. **2pt**

**3b. [7pt]** Bereken de kans dat zich gedurende de controletijd van 2,5 uur meer dan 80 voertuigen aandienen.

3b. Gedurende 2,5 uur is het verwachte aantal voertuigen 36,7\*2,5 = 91,75. **2pt**

Volgens de Poissonverdeling is

**5pt**

**3c. [8pt]** Neem aan dat elk team direct van start kan gaan en vervolgens continu bezig is met controles. Bereken hoeveel tijd een team nodig heeft om met 95% zekerheid 20 controles te kunnen uitvoeren. Maak hiervoor gebruik van een geschikte benadering op grond van de centrale limietstelling en de parameters van de uniforme verdeling.

3c. De tijd die nodig is wordt bepaald door de som van 20 tijden getrokken uit de uniforme verdeling tussen 5 en 17 minuten.

Daarvan is de gemiddelde waarde (5+17)/2 = 11 minuten **1pt**

en de standaarddeviatie is per controle. **2pt**

Volgens de centrale limietstelling geldt voor de totale tijd van 20 controles een normale verdeling met minuten **1pt**

en . **2pt**

De tijd waarin de controles met 95% zekerheid kunnen worden gedaan is

. **2pt**

De gevraagde tijd is minuten = 4,0914 uur.

**3d. [5pt]** Hoe groot is de kans dat het, na het aanhouden van een voertuig, minimaal 3 minuten duurt voordat het volgende voertuig arriveert? Maak gebruik van de negatief exponentiële verdeling.

3d. De tijd tussen twee voertuigen wordt beschreven door exp(), waarbij de tijd in minuten is en het aantal verwachte voertuigen per minuut, dus . **2pt**

De kansfunctie is

**3pt**

Met behulp van de Poissonverdeling **(max 3 pt)**. In 3 minuten komen er gemiddeld

autos. Do kans dat er in 3 minuten geen auto langskomt is

**Opgave 4 (totaal 20 punten)**

**Opgave 4 [Totaal 20 punten]** Een populair tijdverdrijf voor legers tot en met de Napoleontische tijd was het salvoschieten. Onder luide tambourbegeleiding stelden twee legers zich in linie tegenover elkaar op. Op commando vuurden de fuseliers een salvo af op de vijand. We gaan twee strategieën met elkaar vergelijken. Hiervoor gelden de volgende aannamen:

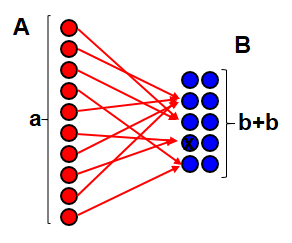
**Aanname 1:** Elke fuselier richt zijn wapen op een willekeurige vijandelijke fuselier die zichtbaar is (in de eerste linie).

**Aanname 2:** Zijn schot schakelt de vijand uit waarop zijn wapen is gericht met kans .

**Aanname 3:** Hij raakt nooit een andere vijand waar zijn wapen niet op is gericht.

**Aanname 4:** Leger A stelt een compagnie van 100 fuseliers in één linie op. Ze vuren op commando en gaan dan hun wapen herladen. Na twee minuten zijn de (dan overgebleven) fuseliers gereed voor het volgende salvo. Leger A geeft dus elke twee minuten één salvo van (hoogstens) 100 schoten af.

**Aanname 5:** Leger B stelt 100 fuseliers in twee linies van elk 50 fuseliers achter elkaar op. De eerste linie staat klaar voor een salvo, de tweede linie brengt zijn wapen in gereedheid. Na het salvo van de eerste linie trekt deze zich terug achter de tweede linie en de tweede linie neemt nu de rol van de eerste linie over en vuren op commando. Fuseliers in de tweede linie worden door de eerste linie afgeschermd en kunnen niet worden uitgeschakeld. Leger B geeft elke twee minuten twee salvo’s van elk (maximaal) 50 schoten af.

**Aanname 6:** Na elke inslag van een vijandelijk salvo hergroeperen de niet-uitgeschakelde fuseliers zich weer tot een nette linie. Neem aan dat het aantal overgebleven fuseliers gelijk is aan de waarde die je op grond van de gegeven kansen verwacht (de verwachtingswaarde). Dit aantal wordt niet afgerond op een gehele waarde. Reken door met verwachte aantallen in twee decimalen.

Bekijk nu een willekeurige soldaat X die staat in een (eerste) linie met soldaten waar net een salvo van vijandelijke kogels binnen is gekomen. De kansvariabele is het aantal dodelijke kogels waardoor soldaat X tijdens dit salvo is getroffen. De kansverdeling van is een binomiale verdeling met trekkingen en een slaagkans van .

**4a. [4pt]** Leg uit waarom de binomiale verdeling met dit aantal trekkingen en deze slaagkans van toepassing is, m.a.w. leg uit wat een “trekking” in dit geval precies is, welke twee uitslagen zo’n trekking kan hebben, wat “slagen” in dit geval betekent, waarom het aantal trekkingen is en hoe je tot een slaagkans van komt. Gebruik eventueel de analogie met keer een munt werpen met een bepaalde slaagkans.

Soldaat X krijgt kogels op zich af ( trekkingen). De kans dat een kogel hem raakt is (de kans dat de kogel op hem is gericht) maal de kans dat deze kogel hem dodelijk treft: 0,1. De slaagkans per trekking is dus en

De soldaat X is uitgeschakeld als hij door minstens één kogel wordt getroffen:

**(Formule 1)**

**4b. [4pt]** Leg uit waarom Formule 1 correct is.

Het verwachte aantal overlevende soldaten uit de linie van soldaten na een salvo met kogels is

**(Formule 2)**

**4c. [4pt]** Leg uit waarom Formule 2 correct is. Maak hierbij gebruik van Formule 1.

De kans dat een soldaat uit de linie van soldaten na een salvo met kogels overleeft is volgens Formule 1 één min de kans dat hij sterft:

Het aantal soldaten dat naar verwachting overleeft is dus

**4d.** **[8pt]** Gebruik Formule 1 om uit te rekenen hoeveel fuseliers elk van de legers naar verwachting over heeft na twee minuten salvo’s uitwisselen: Neem aan dat leger B het eerste salvo afvuurt en de linies wisselt, het tweede salvo komt van leger A en het laatste weer van leger B.

Let op: Leger B gebruikt twee linies, dus houd daar per linie bij wat er gebeurt. Je kunt Formule 2 gebruiken, maar moet wel telkens de en juist kiezen.

Welke strategie is voor dit deel van de veldslag het beste?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Leger A | Leger B |
| Beginsituatie |  |  |
| Na salvo B linie 1 |  |  |
| Na salvo A |  |  |
| Na salvo B linie 2 |  |  |

Na twee minuten hebben alle fuseliers van beide legers elk één keer gevuurd, de verliezen van leger A zijn groter dan die van leger B

Als leger A begint wordt de situatie

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Leger A | Leger B |
| Beginsituatie |  |  |
| Na salvo A |  |  |
| Na salvo B linie 1 |  |  |
| Na salvo B linie 2 |  |  |

Dan komt A er beter af

**=== EINDE TENTAMEN ===**